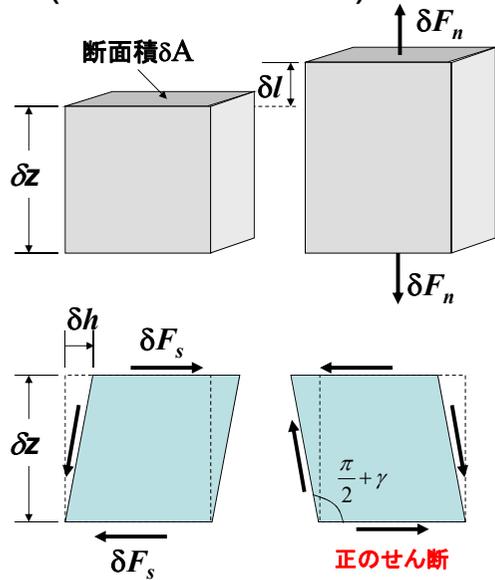


# 応力とひずみ (stress & strain)



直応力:  $\delta\sigma = -\frac{\delta F_n}{\delta A}$   
 (normal stress)  
 直ひずみ:  $\delta\varepsilon = -\frac{\delta l}{\delta z}$   
 (normal strain)

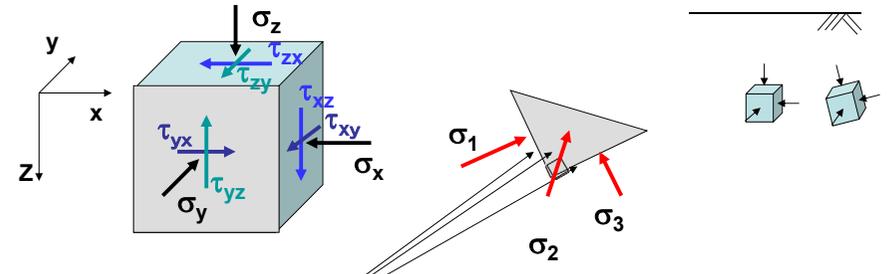
**土質力学の符号**  
 - 直応力、ひずみ: **圧縮を正**  
 - せん断応力、ひずみ: **反時計周りを正**

Why??

せん断応力:  $\delta\tau = -\frac{\delta F_s}{\delta A}$   
 (shear stress)  
 せん断ひずみ:  $\delta\gamma = -\frac{\delta h}{\delta z}$   
 (shear strain)

# 一般的な微小土要素の応力表示

応力: 方向によって変化する。

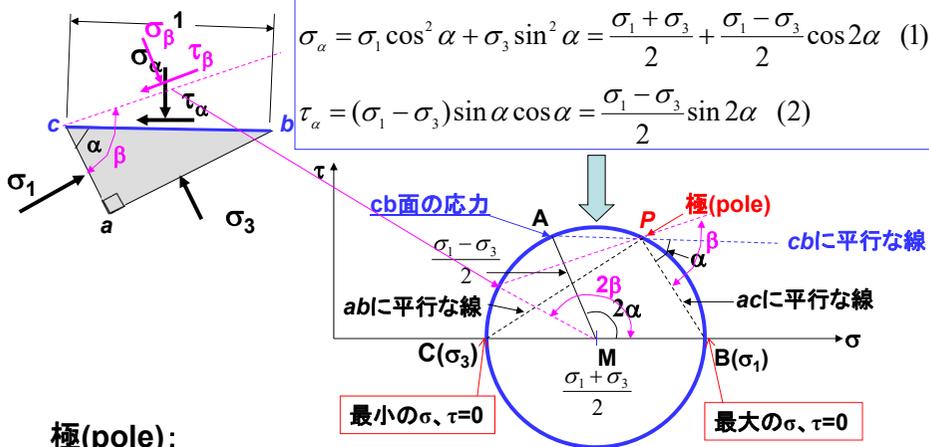


主応力面: せん断力がゼロの面(互いに直交)  
 (principal plane)  
 主応力面上の直応力(**principal stresses**)  
 最大主応力(σ<sub>1</sub>) > 中間主応力(σ<sub>2</sub>) > 最小主応力(σ<sub>3</sub>)  
 (major) (intermediate) (minor)  
 圧縮応力: 正

# モールの応力円(2次元) (Mohr's stress circle)

テキスト 160p

三角形要素abcの力の釣合い



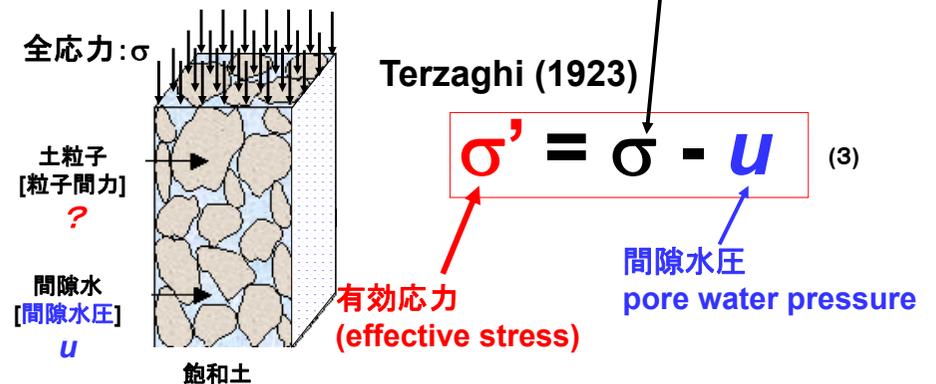
**極(pole):**  
 (傾き、応力成分)既知の面があり、モールの応力円上のその点から面と平行な線を引き、円と交わった点。=> 極から任意の傾きの線を引きモールの円と交わった点の応力は、その線と平行な面上の応力成分

# 地盤中の応力(有効応力、全応力、間隙水圧)

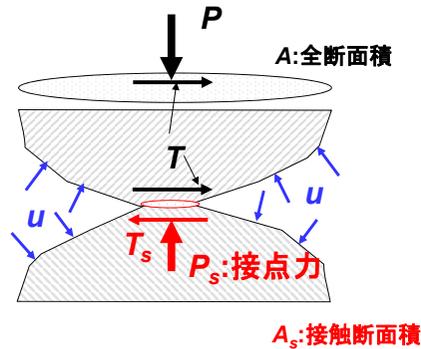
テキスト 106p~

土要素境界、内の応力

境界の直応力: σ => **全応力 (total stress)**



## 土要素内の力釣合い



全断面  
直応力:  $\sigma = \frac{P}{A}$ , せん断(応)力:  $\tau = \frac{T}{A}$

粒子接触面  
直応力:  $\sigma_s = \frac{P_s}{A_s}$ , せん断(応)力:  $\tau_s = \frac{T_s}{A_s}$

5

## 土要素内の力釣合い

面と垂直な方向の力の釣合い

inter-granular stress (粒子間力/全断面)  $\sigma_g = \frac{P_s}{A}$

Aで割る  $P = P_s + (A - A_s)u$

$a = \frac{A_s}{A} \rightarrow \sigma = a\sigma_s + (1-a)u$

$a = \frac{\sigma - u}{\sigma_s - u}$  (これら計ることは困難)

$\sigma_g = \frac{P - (A - A_s)u}{A} = \sigma - (1-a)u$

$\sigma_g = \sigma - u = \sigma'$  (有効応力) (接点面積0)  $a \sim 0$

面と平行な方向の力の釣合い

水強度ゼロ  $\rightarrow T = T_s \rightarrow \tau = a\tau_s$   $\Rightarrow$  粒子接点力  $\Rightarrow$  有効応力

せん断応力: 全応力 = 有効応力

粒子間接点摩擦力がせん断力を伝える

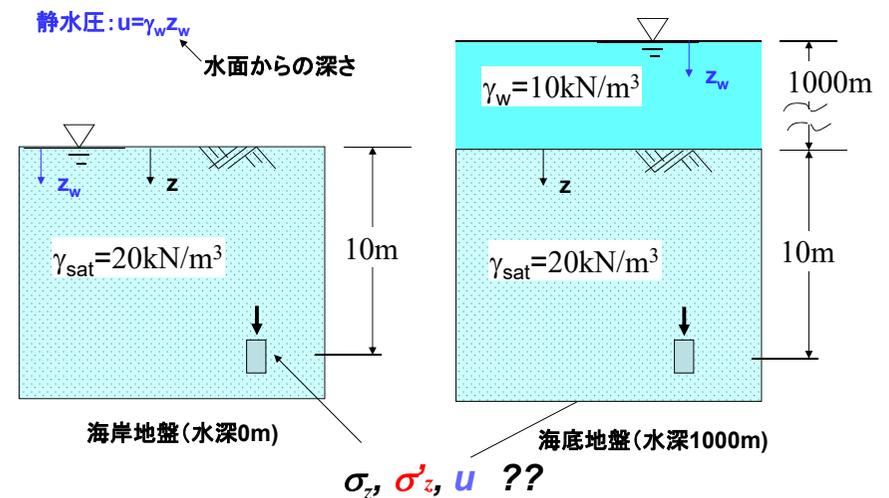
6

## 有効応力の原理 by Karl Terzaghi (1937) (The principle of effective stress)

The stresses in any point of a section through a mass of soil can be computed from the **total principal stress**,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , which act at this point. If the voids of the soil are filled with water under a stress  $u$ , the total stresses consist of two parts. One part  $u$  acts in the water and in the solid in every direction with equal intensity. It is the neutral stress (or **pore pressure**). The balance  $\sigma'_1 = \sigma_1 - u$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2 - u$  and  $\sigma'_3 = \sigma_3 - u$  represents an excess over the neutral stress  $u$  and it has its seat exclusively in the solid phase of the soil. This fraction of the total principal stress will be called the **effective stress**.

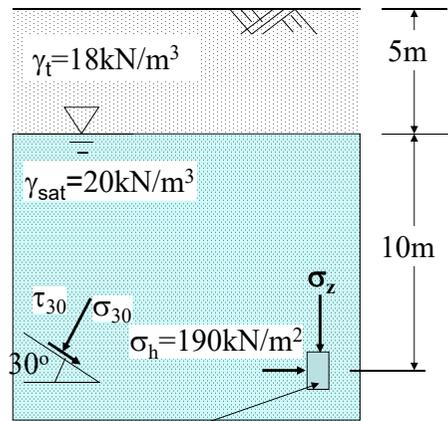
All measurable effects of a change of stress, such as compression, distortion and a change of shearing resistance, are due exclusively to changes of effective stress. The effective stress  $\sigma'$  is related to the total stress and pore pressure by  $\sigma' = \sigma - u$ . (宿題:この翻訳)(次回:手書きレポート) 7

## 地盤中の応力



8

# 地盤中の応力



Why  $\sigma_z$  は計算させて  $\sigma_h$  を与えているか？

- 釣合式(偏微分方程式) ▶ P13
- $\sigma_v: z=0$ での応力(境界条件)が既知 => 積分可能
- $\sigma_h$ : 半無限(境界条件: 未知) => 不静定問題 条件が必要(ひずみ、破壊)

ひずみゼロ => 静止土圧  
破壊 => 塑性(主働、受働土圧)

$\sigma_z, \sigma'_z, u$  ??  
全応力、有効応力のモールの応力円、極??

# 静止土圧, $K_0$ 土圧 (at rest earth pressure)

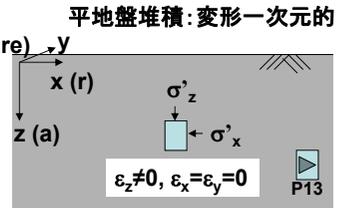
## 一次元変形条件での堆積

この時の側方圧: 静止土圧( $K_0$ 土圧: at rest earth pressure)

通常は、 $\sigma'_z \neq \sigma'_x$ ;  $\sigma'_x = K_0 \sigma'_z$  (4)

$K_0$ : 静止土圧係数 (earth pressure coefficient at rest)

注:  $K_0$  値は有効鉛直土圧に掛ける  
側方全応力を求めるために  $\sigma_x = K_0 \sigma_z$  は不可。

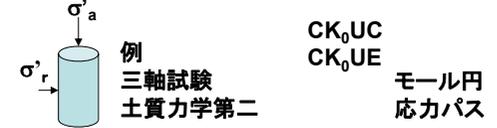


平地盤堆積: 変形一次元的  
平地盤: 最も一般的な初期条件

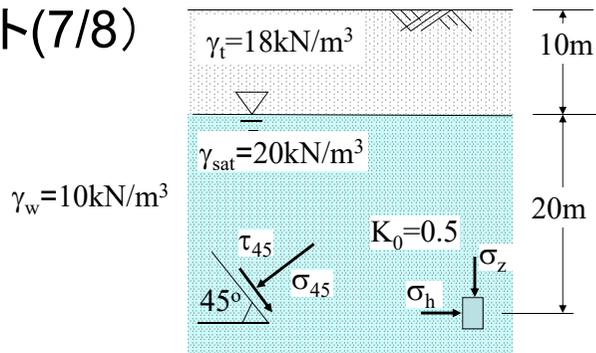
$K_0$  値は、土質以外に、堆積履歴、応力履歴によって変化する。正規圧密、過圧密で異なる。

土の力学特性: 堆積過程によって決まる構造と、応力状態の影響を受ける。

したがって、より正確な土の力学特性を調べるためには、 $K_0$  圧密した供試体に対して、力学試験を行うことが望まれる。ただし、重要構造物、研究目的に限られる。



# 小テスト(7/8)



- 上図に示す平地盤の深さ30m地点の  $\sigma_z, \sigma_h, \sigma'_z, \sigma'_h, u$  はそれぞれいくらか?  $\gamma_w=10\text{kN/m}^3$  とする。
- また、この点の全応力、有効応力のモール円を描くとともに円上に極(P)の位置を示せ。
- 図に示すこの点の45°傾斜面に作用する  $\sigma_{45}, \tau_{45}$  はいくらか? (注: せん断力の符号)

# 本日のTechnical terms

- 応力: stress; ひずみ: strain
- 直応力: normal stress; 直ひずみ: normal strain
- せん断応力: shear stress; せん断ひずみ: shear strain
- 全応力: total stress;
- 有効応力: effective stress;
- 間隙水圧: pore water pressure;
- 有効応力原理: The principle of effective stress;
- 主応力: principal stresses; 主応力面: principal plane
- 最大主応力: major principal stress
- 中間主応力: intermediate principal stress
- 最小主応力: minor principal stress
- モールの応力円: Mohr's stress circle
- (モールの)極: pole
- 静止土圧( $K_0$ 土圧): at rest earth pressure ( $K_0$  earth pressure)

# 半無限弾性体内の応力

テキストP201

K<sub>0</sub>状態の応力 => 一次元応力

平地盤下の応力、もしくは非常に広い範囲に荷重が作用した時に対応

局所荷重時 => 応力分布 => 2次元、3次元の応力状態

P9

微小要素の力のつり合い式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \gamma \end{aligned} \right\} (5)$$

モーメント=0

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

未知数: 6

釣合式: 3 不静定

解を得るためには条件: ひずみの適合条件、

変位のx,y,z成分をu,v,w、微小変形+圧縮を正

$$\epsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6.1)$$

$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \gamma_{yz} = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \gamma_{zx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (6.2)$$

Hooke's law:

$$\left. \begin{aligned} E\epsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E\epsilon_y &= \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ E\epsilon_z &= \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\} (7.1)$$

$$G\gamma_{yz} = \tau_{yz}, G\gamma_{zx} = \tau_{zx}, G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \quad (7.2)$$

P10

13

# 表面荷重による地盤内の応力増分

ブーシネスクの解(Boussinesq's equation):

半無限等方弾性体表面の集中荷重Pによる応力増分

応力解

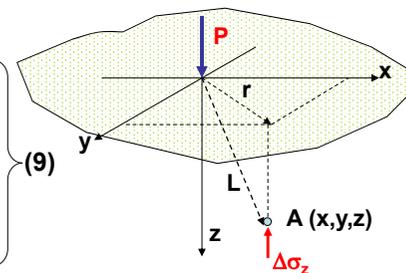
$$\Delta\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi L^5} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{[r^2 + z^2]^{5/2}} \quad (8) \quad \text{鉛直応力増分: } E, \nu \text{ に無関係}$$

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3x^2z}{L^5} - (1-2\nu) \left[ \frac{x^2 - y^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{y^2z}{L^3r^2} \right] \right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{3y^2z}{L^5} - (1-2\nu) \left[ \frac{y^2 - x^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{x^2z}{L^3r^2} \right] \right\} \quad (9)$$

$$\Delta\tau_{rz} = \frac{3Qrz^2}{2\pi r^5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$



14

## 一様表面分布荷重(Δq<sub>0</sub>)による鉛直応力増分

式(1)を載荷域で積分

円形載荷域(中央)

$$d\sigma_z = \frac{3(\Delta q_0 r d\theta dr)}{2\pi z^2 \left[ 1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right]^{5/2}} \quad (10)$$

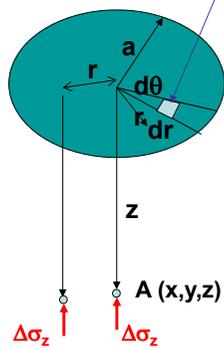
弾性

$$\Delta\sigma_z = \int d\sigma_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \frac{3(\Delta q_0 r d\theta dr)}{2\pi z^2 \left[ 1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2 \right]^{5/2}}$$

$$= \Delta q_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\left[ 1 + \left(\frac{a}{z}\right)^2 \right]^{3/2}} \right\} \quad (11)$$

影響係数: I

微小領域に作用する集中荷重



15

## 矩形基礎の角部

微小領域に作用する集中荷重

式(1)を載荷域で積分

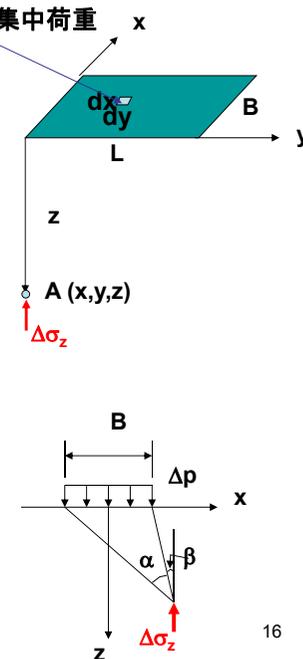
$$d\sigma_z = \frac{3\Delta q_0(dx dy)z^3}{2\pi [x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} \quad (12)$$

$$\Delta\sigma_z = \int d\sigma_z = \int_{y=0}^L \int_{x=0}^B \frac{3\Delta q_0(dx dy)z^3}{2\pi [x^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} = \Delta q_0 I$$

影響係数 I=f(m<sub>1</sub>=B/z, n<sub>1</sub>=L/z)

## 帯基礎(2次元)

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_z &= \frac{\Delta q_0}{\pi} \{ \alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) \} \\ \Delta\sigma_x &= \frac{\Delta q_0}{\pi} \{ \alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) \} \\ \Delta\tau_{xz} &= \frac{\Delta q_0}{\pi} \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) \end{aligned} \right\} (14)$$



16

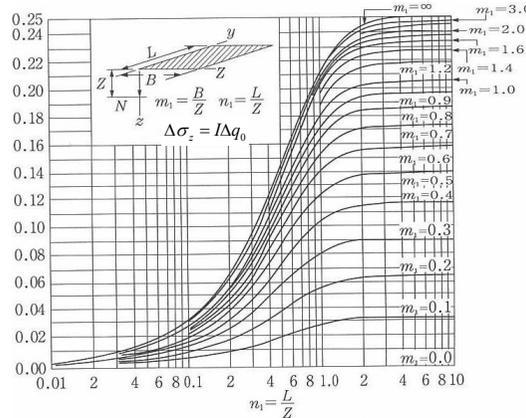
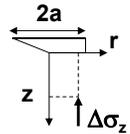
# 円形基礎と矩形基礎(角部)の影響係数

## 影響係数 I

円形基礎

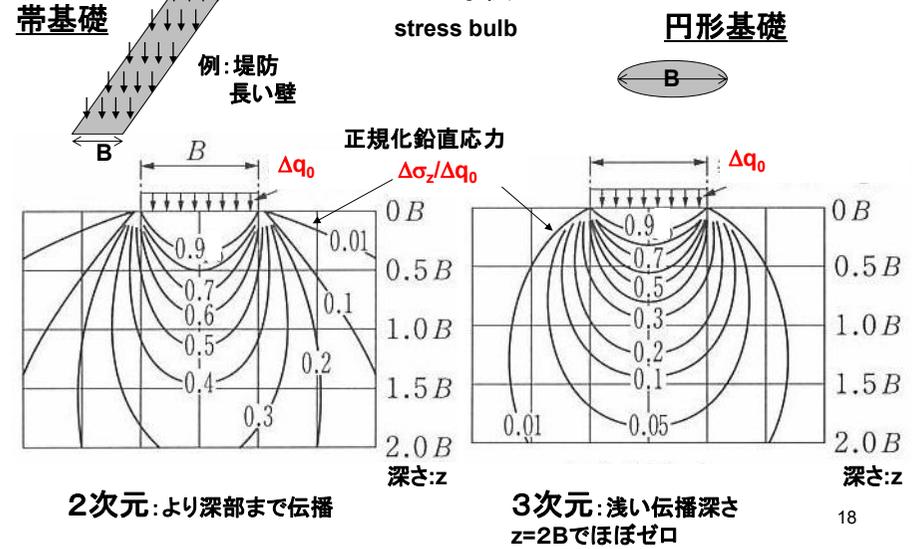
矩形基礎(角部)

z/a	r/a					
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.999	0.999	0.998	0.996	0.976	0.484
0.2	0.992	0.991	0.987	0.970	0.890	0.468
0.3	0.976	0.973	0.963	0.922	0.793	0.451
0.4	0.949	0.943	0.920	0.860	0.712	0.435
0.5	0.911	0.902	0.869	0.796	0.646	0.417
0.6	0.864	0.852	0.814	0.732	0.591	0.400
0.7	0.811	0.798	0.756	0.674	0.545	0.367
0.8	0.756	0.743	0.699	0.619	0.504	0.366
0.9	0.701	0.688	0.644	0.570	0.467	0.348
1.0	0.646	0.633	0.591	0.525	0.434	0.332
1.2	0.546	0.535	0.501	0.447	0.377	0.300
1.5	0.424	0.416	0.392	0.355	0.308	0.256
2.0	0.286	0.286	0.268	0.248	0.224	0.196
2.5	0.200	0.197	0.191	0.180	0.167	0.151
3.0	0.146	0.145	0.141	0.135	0.127	0.118
4.0	0.087	0.086	0.085	0.082	0.080	0.075



17

表面等分布荷重を受ける半無限弾性体内の鉛直応力  $\sigma_z$  のコンター



2次元: より深部まで伝播

3次元: 浅い伝播深さ z=2Bでほぼゼロ

18

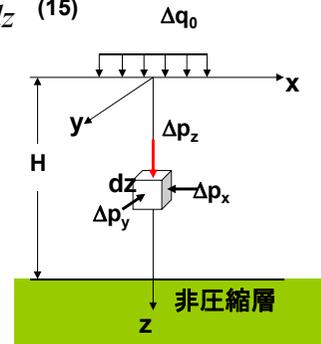
## 弾性沈下量:

等方弾性体のフック則より

$$S_e = \int_{z=0}^H \varepsilon_z dz = \frac{1}{E_s} \int_0^H (\Delta p_z - \nu_s \Delta p_x - \nu_s \Delta p_y) dz \quad (15)$$

$$S_e = \Delta q_0 B \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} I_p \quad (16)$$

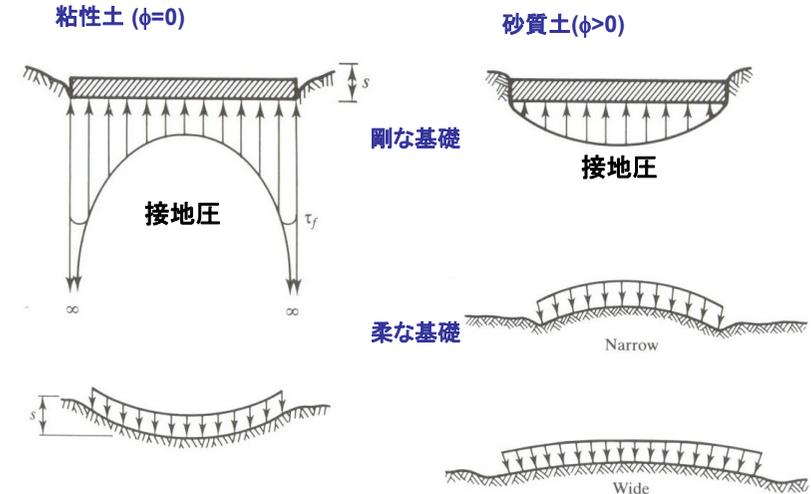
$\Delta q_0$ : 基礎からの載荷圧  
 B: 基礎幅  
 $\nu_s$ : 土骨格のポアソン比  
 $E_s$ : 土骨格のヤング係数  
 $I_p$ : 影響係数(無次元)



剛な基礎 => 均等沈下  
 柔な基礎 (均等圧力分布) => 不等沈下

19

剛な基礎と柔な基礎の沈下分布と基礎底面の接地圧  
 粘性土地盤 ( $\phi=0$ ) と砂質土地盤 ( $\phi>0$ )



" Soil Mechanics " Lambe and Whitman

20

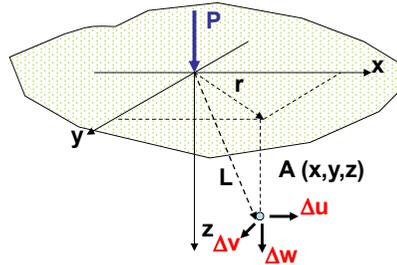
# 表面載荷による沈下分布

ブーシネスクの変位解(Boussinesq's equation) :

半無限等方弾性体表面の集中荷重Pによる変位(u,v,w)

当然、変位はE,νに依存

$$\left. \begin{aligned} \Delta w &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{z^2}{L^3} + \frac{2(1-\nu)}{L} \right\} \\ \Delta u &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{z}{L^3} - \frac{(1-\nu)}{L(L+z)} \right\} x \\ \Delta v &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ \frac{z}{L^3} - \frac{(1-\nu)}{L(L+z)} \right\} y \end{aligned} \right\} (17)$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

重要なものは、地表面(z=0, L=r)の沈下(z方向変位:w)

$$\Delta w = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E r} \quad (18)$$

応力と同様に載荷域について積分:  
半無限弾性体上の柔な矩形基礎(角部)の沈下

$$S_e = \Delta q_0 B \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \frac{\alpha}{2} \quad (19)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{m^2+1}+m}{\sqrt{m^2+1}-m} \right) + m \ln \left( \frac{\sqrt{m^2+1}+1}{\sqrt{m^2+1}-1} \right) \right] \quad (20)$$

$$m=L/B$$

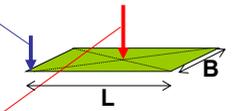
柔な矩形基礎中央部の沈下

$$S_e = \Delta q_0 B \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \alpha \quad (21)$$

剛な矩形基礎中央部の沈下

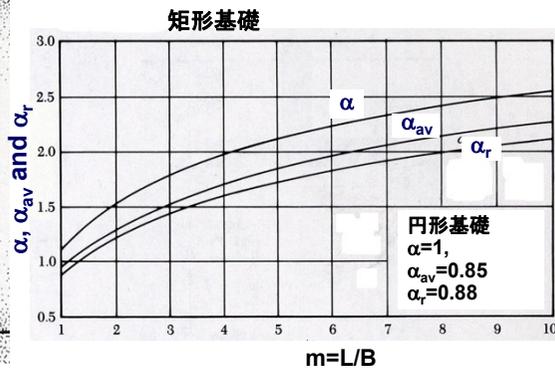
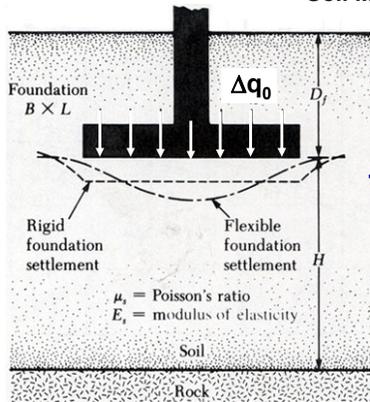
$$S_e = \Delta q_0 B \frac{1-\nu_s^2}{E_s} \alpha_r \quad (22)$$

2倍??

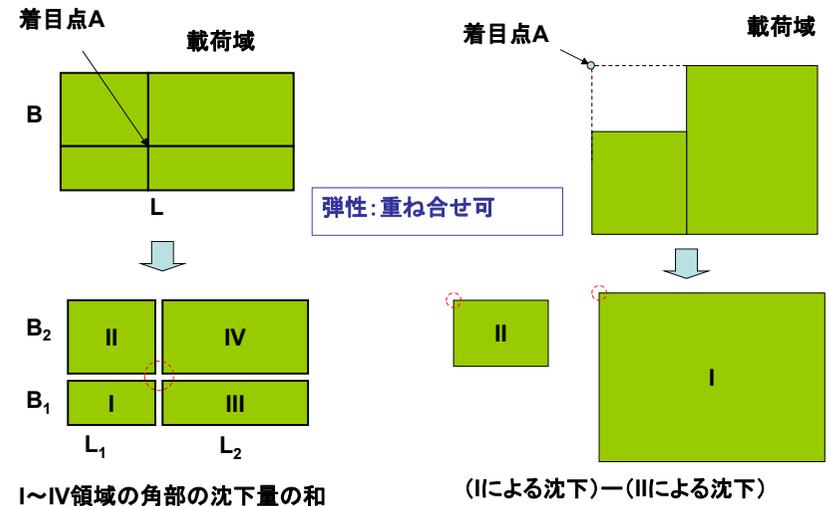


# 柔、剛な基礎の弾性沈下 一影響係数

"Soil Mechanics" Lambe and Whitman



# 矩形基礎の任意点、基礎外の沈下

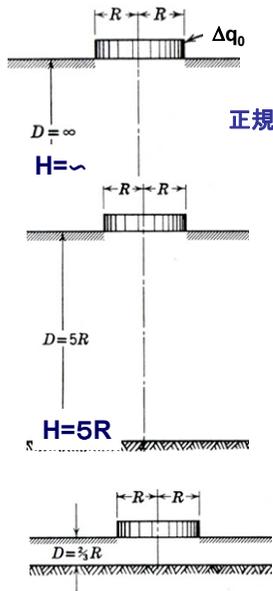


I~IV領域の角部の沈下量の和

(IIによる沈下)-(IIIによる沈下)

# 圧縮層厚の影響(円形基礎)

"Soil Mechanics" Lambe and Whitman



正規化沈下量

